Warmteleer

Als Δ (warmte-energie) >> Δ (mechanische energie) :

$$\frac{dE_t}{dt} = \Phi_{m,in} u_{in} - \Phi_{m,uit} u_{uit} - \Phi_w + \Phi_A$$

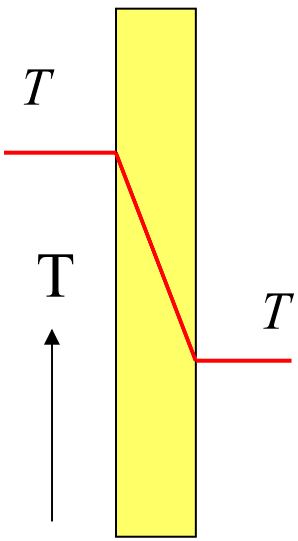
met : $E_T = \rho c_P T.V$ en $u = c_p T$

Transport door:

- *geleiding* $\Phi_w'' = -\lambda\, dT/dx$
- *stroming* $\Phi_w'' = v \rho c_p T$
- *straling* $\Phi_w'' = e \sigma T^4$

Enkel glas en dubbel glas

*Vergelijk de warmteverliezen bij enkel glas (6 mm dik) en dubbel glas (2 * 6 mm met 1 cm luchtspleet)*

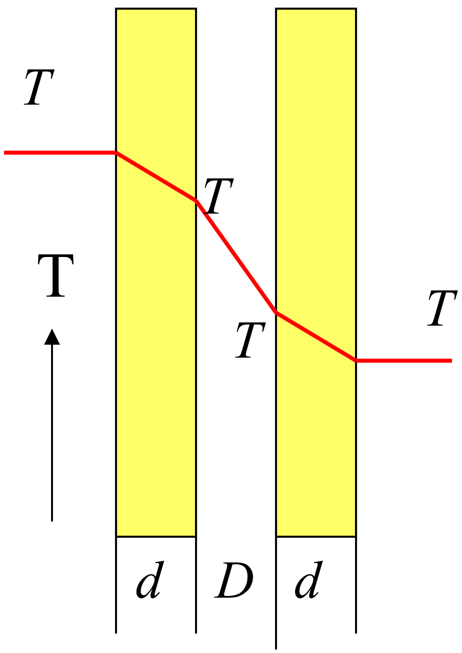


$$\cancel{\frac{\text{ophoping}}{\text{tijdseenheid}}} = \text{stroom}_{\text{in}} - \text{stroom}_{\text{uit}} + \cancel{\text{productie}}$$

$$-\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{in} = -\lambda \left.\frac{dT}{dx}\right|_{uit} \Rightarrow -\lambda \frac{dT}{dx} = \text{constant}$$

$$\Phi_w'' = \lambda \frac{T_i - T_u}{d} = 0{,}9 \frac{20-(-10)}{6.10^{-3}} = 4{,}5 \frac{kW}{m^2}$$

Enkel glas en dubbel glas



$$\Phi_w'' = \lambda_g \frac{T_i - T_1}{d} \Rightarrow \qquad T_i - T_1 = \Phi_w'' \frac{d}{\lambda_g}$$

$$T_1 - T_2 = \Phi_w'' \frac{D}{\lambda_l}$$

$$T_2 - T_u = \Phi_w'' \frac{d}{\lambda_g}$$

$$+ \quad \overline{\qquad T_i - T_u = \Phi_w'' \left(2\frac{d}{\lambda_g} + \frac{D}{\lambda_l} \right) \qquad}$$

$$\Phi_w'' = \left(2\frac{d}{\lambda_g} + \frac{D}{\lambda_l} \right)^{-1} (T_i - T_u) = \left(2\frac{6.10^{-3}}{0,9} + \frac{10^{-2}}{0,025} \right)^{-1} .30 = 72,6 \frac{W}{m^2}$$

Warmteweerstanden

Uit het vorige voorbeeld: $$\Phi_w'' = \left(2\frac{d}{\lambda_g} + \frac{D}{\lambda_l}\right)^{-1}(T_i - T_u)$$

Warmteweerstand = d/λ (= 1/h of 1/U)
warmteweerstanden mogen worden opgeteld

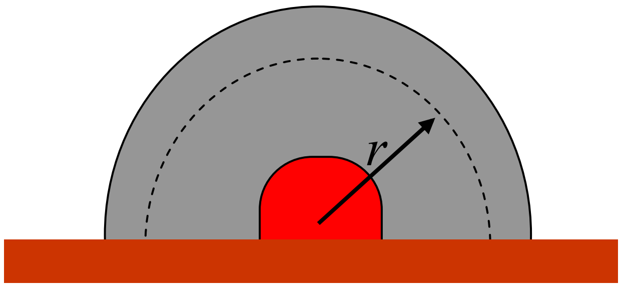
$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

U heet totale warmteoverdrachtscoëfficiënt en
h heet partiële warmteoverdrachtscoëfficiënt

Algemene procedure

- kies een slim element
- pas de balansvergelijking toe
- herleid deze tot een differentiaalvergelijking
- scheiden van variabelen
- integratie
- randvoorwaarden toepassen

Het inpakken van een kernreactor



gegeven:

rest-energie:20 kW, bodem is adiabatisch

warmtegeleiding beton 0,1: W/m.K

temperatuur in de reactor < 800^0C

gevraagd:

maximale dikte van het beton

Analyse: alle warmte uit de reactor gaat door iedere concentrische (halve) bol om de reactor

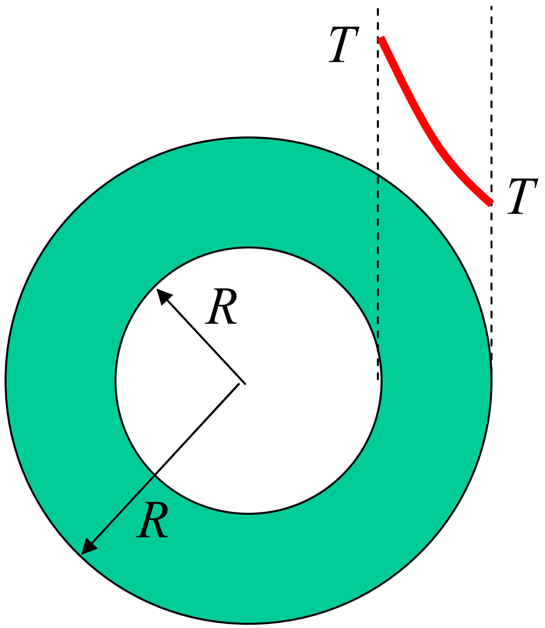
$$\Phi_w = -2\pi r^2 \lambda \frac{dT}{dr} = \text{const.}$$

$$\mathrm{dT} = -\frac{\Phi_\mathrm{w}}{2\pi r^2 \lambda} dr \quad \Rightarrow$$

$$T_r - T_u = \frac{\Phi_\mathrm{w}}{2\pi(R_u - R_r)\lambda}$$

$$R_u - R_i = \frac{20 * 10^3}{2\pi.0{,}1.800} = 10m$$

Isolatie van een buis



$$\Phi_w{}' = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r = c_1 = const$$

Integreren:

$$-2\pi\lambda \int dT = \int \frac{c_1}{r} dr$$

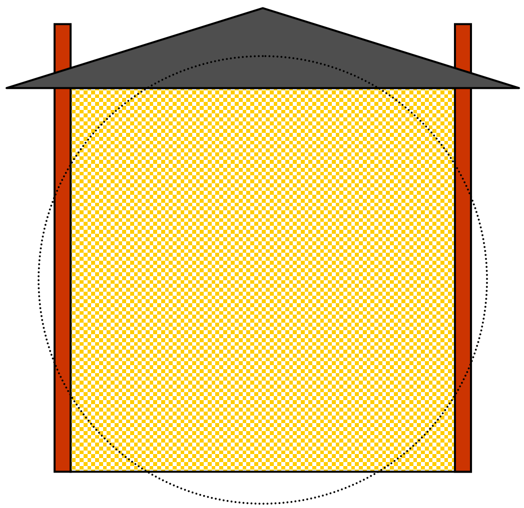
$$-2\pi\lambda T = c_1 . \ln(r) + c_2$$

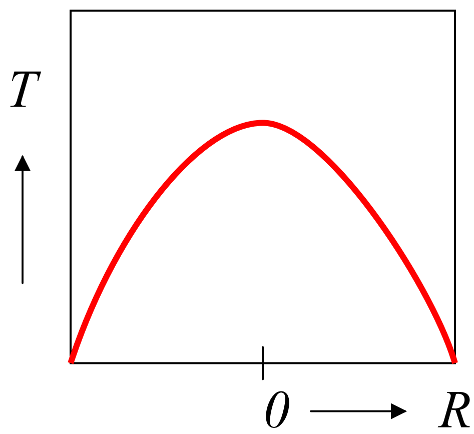
Randvoorwaarden invullen:

$$\frac{T - T_1}{T_2 - T_1} = \frac{\ln(r/R_2)}{\ln(R_1/R_2)}$$

$$\Phi_w{}' = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r = \frac{2\pi\lambda (T_1 - T_2)}{\ln(R_1/R_2)}$$

De hooiberg *(tentamen TS b juni 200)*





Gegeven:

- *hooibroei*
- $q = 3\ W/m^3$
- $\lambda = 0{,}025\ W/m.K$
- $T\ \ = 20\ ^0C$
- $T\ < 200\ ^0C$

Gevraagd:

- *diff vgl voor de stationaire temperatuur*
- *maximale grootte hooiberg*
- *diff vgl voor instationaire situatie*

<u>Analyse:</u> het warmtetransport door een willekeurige bol is gelijk aan de warmteproductie in de bol

De hooiberg (2)

$$\frac{4}{3}\pi .r^3 q = -4\pi .r^2 \lambda \frac{dT}{dr}$$

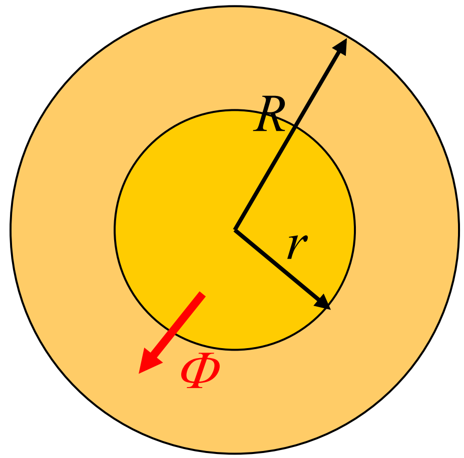
$$\boxed{\frac{1}{3} rq = -\lambda \frac{dT}{dr}}$$

$$\frac{1}{3}\frac{rq}{\lambda} dr = -dT$$

$$\frac{1}{3}\frac{q}{\lambda}\int_0^R rdr = -\int_{T_c}^{T_w} dT$$

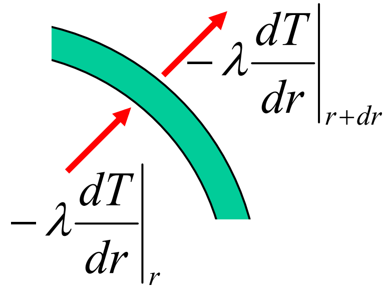
$$\frac{1}{6}\frac{q}{\lambda} R^2 = T_c - T_w$$

Productie = warmtestroom



$$R = \sqrt{6\frac{\lambda}{q}\left(T_c - T_w\right)} = \sqrt{6\frac{0,025}{3}.180} = 3m \Rightarrow \boxed{D < 6m}$$

De hooiberg (3)

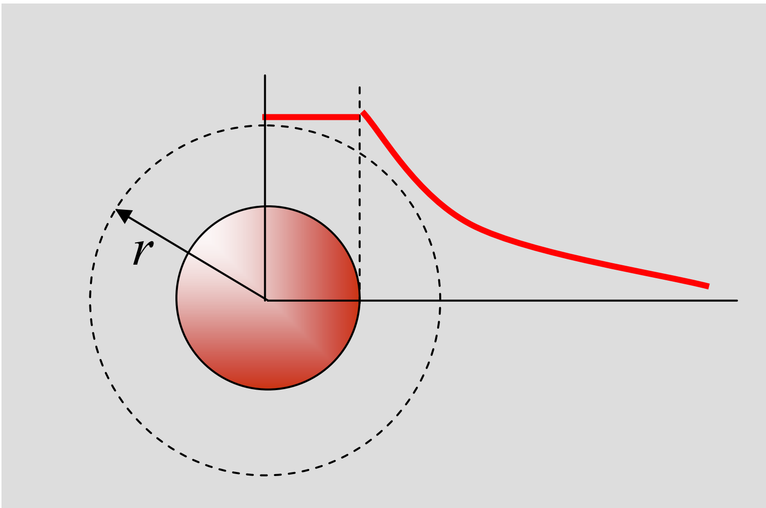


$$\cancel{4\pi} r^2 dr.\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = -\cancel{4\pi} r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_r + \cancel{4\pi}(r+dr)^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r}\Big|_{r+dr} + q.\cancel{4\pi} r^2 dr$$

$$r^2 dr.\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = +\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right) dr + q.r^2 dr$$

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \lambda \frac{\partial T}{\partial r}\right) + q$$

Radioactief afval opslaan in zoutlagen



Bolvormige ruimte
D = 20 m
T < 60 ^{0}C
T = 10 ^{0}C
λ = 2.0 W/m.K
zoutlaag is ∞ groot

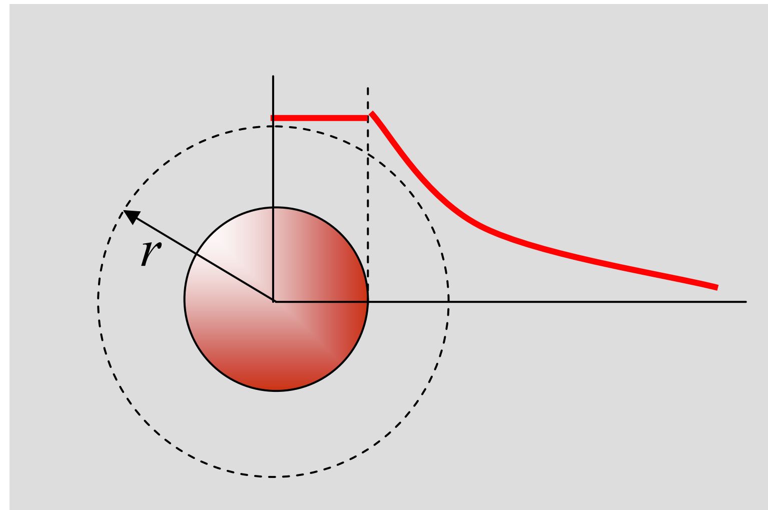
Hoeveel activiteit mag er maximaal in deze caverne worden opgeslagen?

Analyse:

in de stationaire situatie wordt er door iedere concentrische bol om de caverne evenveel warmte getransporteerd

Warmteafgifte van een bol

- $$\Phi_w = -\lambda \frac{dT}{dr}.4\pi r^2 = c_1$$
- $$-\frac{4\lambda\pi}{c_1}\int dT = \int \frac{dr}{r^2}$$
- $$-\frac{4\lambda\pi}{c_1}T = -\frac{1}{r} + c_2$$
- $$rvw: r \to \infty :\ T \to T_\infty$$
  $$r = R :\ \ T = T_1$$
- $$\frac{T - T_\infty}{T_1 - T_\infty} = \frac{R}{r}$$
- $$\Phi_w = 4\pi R\lambda\left(T_1 - T_\infty\right)$$



$$\Phi_w = 4\pi.5.2.50$$
$$= 6283\,W \approx 6\,kW$$

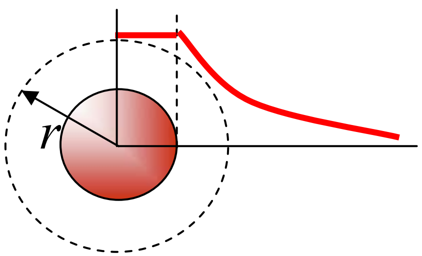
Technische warmteleer

is gebaseerd op de warmteoverdrachtscoëfficiënt

Basisvergelijking: $\Phi_w'' = h.A.\Delta T$

h: warmteoverdrachtscoefficient (W/m.K)

de bol

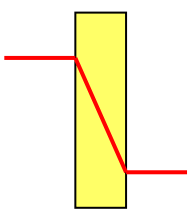


$$\Phi_w = 4\pi R\lambda\left(T_1 - T_\infty\right)$$

$$\Phi_w = 4\pi R^2 \frac{\lambda}{R}\left(T_1 - T_\infty\right)$$

$$h = \frac{2\lambda}{D}$$

de plaat



$$\Phi_w = A\frac{\lambda}{D}\left(T_1 - T_2\right)$$

$$h = \frac{\lambda}{D}$$

Het Nusselt getal

$$Nu \equiv \frac{hD}{\lambda} \quad \text{(dimensieloze w.o. coeff.)}$$

$$h = \frac{2\lambda}{D}$$

voor een bol geldt
Nu = 2

$$h = \frac{\lambda}{D}$$

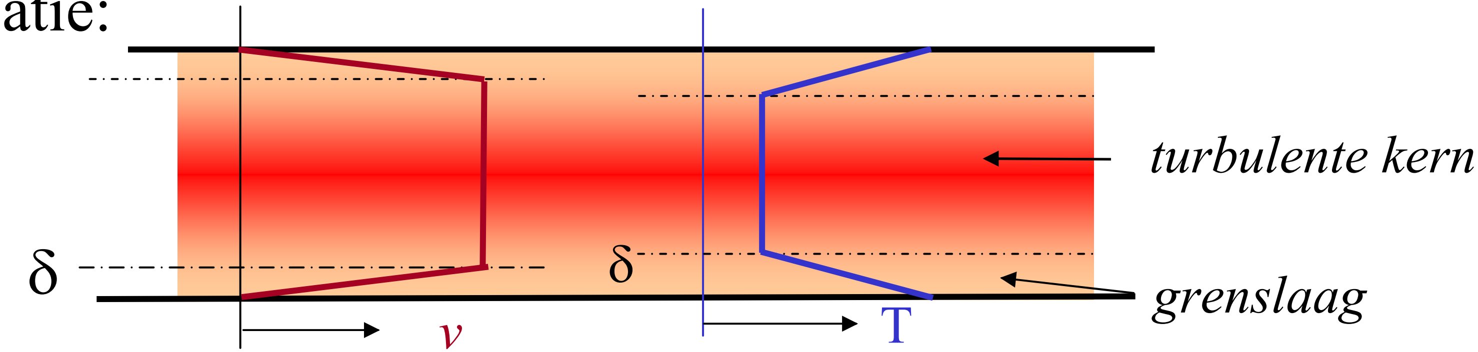
voor een plaat geldt
Nu = 1

Algemeen recept:

1) vind Nu
2) bereken h = Nu.λ/D
3) bereken Φ = h.A. ΔT

Turbulente buisstromingen

Idealisatie:



$$\tau_{f-w} = \eta \frac{\langle v \rangle}{\delta_h} = \frac{f}{2} \rho \langle v \rangle^2 \qquad \Phi_w'' = h\left(T_w - \langle T \rangle\right) = \lambda \frac{T_w - \langle T \rangle}{\delta_w}$$

Geleiding door de grenslaag en opmenging in de bulk

$$\frac{\delta_h}{\delta_w} = const = \left(\frac{\nu}{a}\right)^{1/3} = \left(\frac{\eta . c_p}{\lambda}\right)^{1/3} = \mathrm{Pr}^{1/3}$$

Turbulente buisstroming

$$\tau_{f-w} = \eta \frac{\langle v \rangle}{\delta_h} = \frac{f}{2} \rho \langle v \rangle^2 \qquad \Phi_w'' = h\left(T_w - \langle T \rangle\right) = \lambda \frac{T_w - \langle T \rangle}{\delta_w}$$

theorie

$$\frac{hD_i}{\lambda} = \frac{D_i}{\delta_w} = \frac{D_i}{\delta_h} \frac{\delta_h}{\delta_w} = \frac{f}{2} \frac{\rho \langle v \rangle D_i}{\eta} \frac{\delta_h}{\delta_w} \qquad Nu \approx \frac{f}{2}.\mathrm{Re}.\mathrm{Pr}^{1/3}$$

praktijk

$$\frac{hD_i}{\lambda} = 0{,}027 \left(\frac{\rho \langle v \rangle D_i}{\eta} \right)^{0{,}8} \left(\frac{\nu}{a} \right)^{0{,}33} \qquad \boxed{Nu = 0{,}027.\mathrm{Re}^{0{,}8}.\mathrm{Pr}^{0{,}33}}$$

Opwarmen en afkoelen van buisstroming

De foute benadering:

$$\Phi_w = h.A.\left(T_w - \langle T \rangle\right)$$

$$\Phi_w = \Phi_v \rho c_p \left(T_{uit} - T_{in}\right)$$

$$dus:$$

$$T_{uit} - T_{in} = \frac{h.A}{\Phi_v \rho c_p}\left(T_w - \langle T \rangle\right)$$

De goede manier:

warmtebalans over een stukje dx

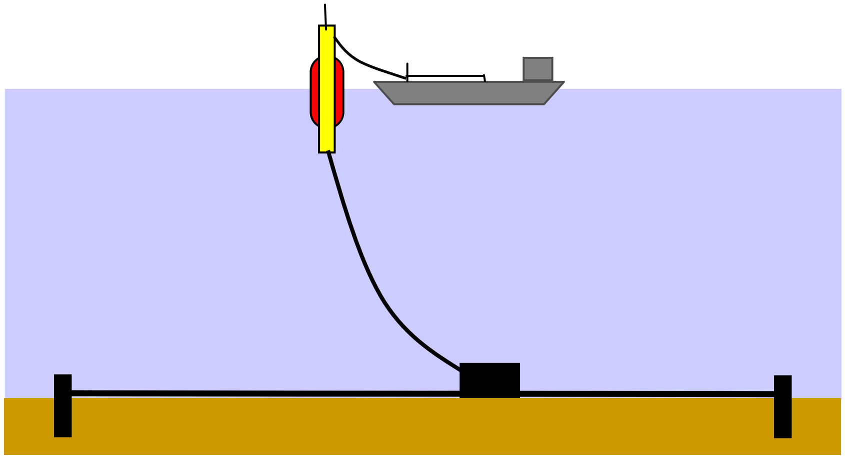
Nusselt bepalen

h berekenen uit Nu

integreren

randvoorwaarden invullen

Noordzee olie uit het Troll veld

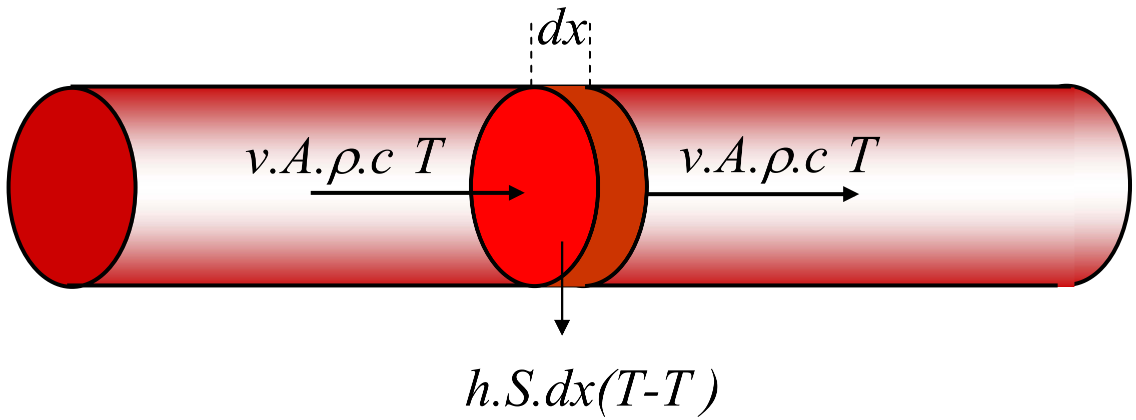


$T = 80\ ^0C$
$T = 10\ ^0C$
$L = 7\ km$
$D = 20\ cm$
$v = 1\ m/s$
$\rho = 850\ kg/m^3$
$c = 2000\ J/kg.K$
$\lambda = 0{,}2\ W/m.K$
$\eta = 0{,}01\ Pa.s$
$\lambda = 0{,}04\ W/m.K$

Eis: T = 40 ^{0}C

gevraagd: afkoeling als de pijp ongeïsoleerd is
isolatie met PUR schuim om voldoende te isoleren

De differentiaalvergelijking opstellen



$$v.\pi R^2 \rho c_p T\Big|_{x+dx} - v.\pi R^2 \rho c_p T\Big|_x = -h.2\pi R dx\left(T - T_z\right)$$

$$v.R\rho c_p T\Big|_{x+dx} - v.R\rho c_p T\Big|_x = -h.2dx\left(T - T_z\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(v.R\rho c_p T\right)dx = -h.2\left(T - T_z\right)dx$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{2h}{vR\rho c_p}\left(T - T_z\right)$$

De differentiaalvergelijking oplossen

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{2h}{vR\rho c_p}(T - T_z)$$

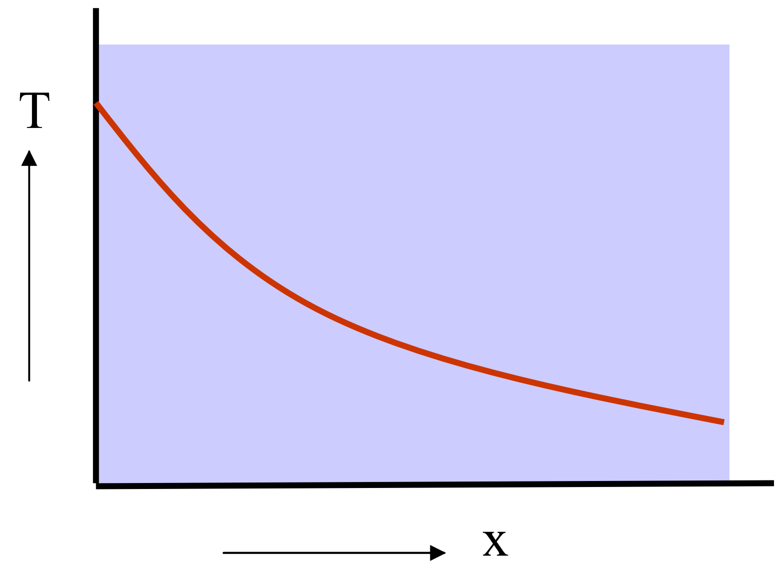
$$\frac{dT}{(T - T_z)} = -\frac{2h}{vR\rho c_p}dx$$

$$\ln(T - T_z) = -\frac{2h}{vR\rho c_p}x + c$$

randvoorwaarde : $\mathrm{T} = \mathrm{T}_0$ voor $\mathrm{x} = 0$

$$\ln\left(\frac{T - T_z}{T_0 - T_z}\right) = -\frac{2h}{vR\rho c_p}x$$

$$\frac{T - T_z}{T_0 - T_z} = \exp\left\{-\frac{2h}{vR\rho c_p}x\right\}$$



De warmteoverdrachts-coëfficiënt bepalen

$$Nu = 0{,}027.\mathrm{Re}^{0{,}8}\,\mathrm{Pr}^{0{,}33}$$

$$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a} = \frac{\eta c_p}{\lambda} = \frac{0{,}01.2*10^3}{0{,}2} = 100$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{850.1.0{,}2}{0{,}01} = 17*10^3 \Rightarrow \text{turbulent}$$

$$\mathrm{Nu} = 0{,}027.(17000)^{0{,}8}(100)^{0{,}33} = 299 = \frac{hD}{\lambda}$$

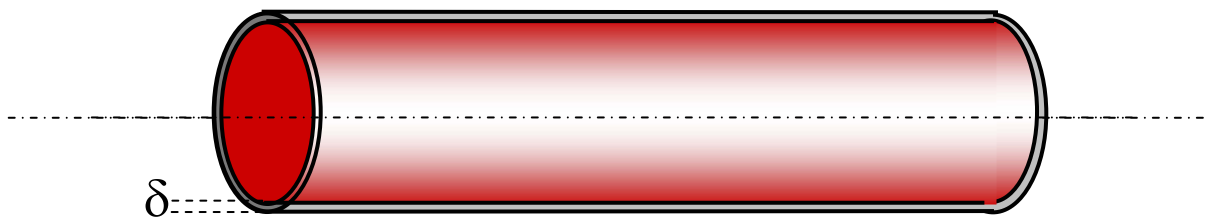
$$h = 299\frac{0{,}2}{0{,}2} = 299\frac{W}{m^2K}$$

Oplossen

$$\frac{T - T_z}{T_0 - T_z} = \exp\left\{ - \frac{2 \times 299 \times 7 * 10^3}{1 \times 0{,}1 \times 850 \times 2000} \right\} = 2 * 10^{-11}$$

$$T = T_z + 2 * 10^{-11} \times (T_0 - T_z) \approx 10^0 C$$

volledige afkoeling $\Rightarrow$ dus isoleren



Hoe klein moet h zijn om wel op een eindtemperatuur van 40 ^{0}C uit te komen?

Bereken een totale w.o.coeff. U

$$\frac{T - T_z}{T_0 - T_z} = \exp\left\{-\frac{2U}{vR\rho c_p}x\right\}$$

$$\frac{2U}{vR\rho c_p}x = -\ln\left\{\frac{40-10}{80-10}\right\} = 0,84$$

$$dus: U = 10,2\,W/m^2K$$

Als δ << D : vlakke plaat berekening

$$\frac{1}{U} = \frac{1}{h} + \frac{\delta}{\lambda}$$

$$\frac{1}{10,2} = \frac{1}{299} + \frac{\delta}{0,04}$$

$$\delta = 3,8*10^{-3} \approx 4mm$$